Planche n° 7. Suites et séries de fonctions. Corrigé

Exercice n° 1

1) Pour tout entier naturel n, f_n est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

Convergence simple sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
• Si $x = 0$, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

• Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$ et de nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. On peut noter tout de suite que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$ et donc $\|f_n\|_\infty \geqslant \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $\|f_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$$

Si on n'a pas remarqué ce qui précède, on étudie la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$ (f_n étant impaire) dans le but de déterminer $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x, $f_n'(x) = n\dfrac{(1+n^2x^2) - x(2n^2x)}{(1+n^2x)^2} = \dfrac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x)^2}$.

Par suite, la fonction f_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[$.

Puisque la fonction f_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini.

Convergence uniforme et localement uniforme sur $]0, +\infty[$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge toujours pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ car pour $n \geqslant 1$, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - 0| = \dfrac{1}{2}$.

Soit a un réel strictement positif fixé. Soit $n > \dfrac{1}{a}$. On a $0 < \dfrac{1}{n} < a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. Par suite, pour tout réel x de $[a, +\infty[$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(a)$.

Donc $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - 0| = f_n(a)$ pour $n > \dfrac{1}{a}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x) - 0| = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a > 0$ et en particulier converge localement uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$.

2) Convergence simple sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante $f : x \mapsto 1$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^+$. $\lim\limits_{x\to-\infty}|f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Par suite, pour tout entier naturel n, la fonction $|f_n - f|$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty}|f_n(x) - f(x)| = 1$ et donc $\sup\limits_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x) - f(x)| \geqslant 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge donc pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence localement uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n = f_n - f$. La fonction g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$

$$g_n'(x) = e^{-x}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right) = -\frac{e^{-x}x^n}{n!}.$$

Si n est pair, la fonction g_n est décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.
Si n est impair, la fonction g_n est croissante sur $\mathbb{R}^-$, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.
Dans les deux cas, si $x \in [a, b]$, $|g_n(x)| \leqslant \text{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\}$ avec égalité effectivement obtenue pour $x = a$ ou $x = b$. Donc

$$\sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)| = \text{Max}\{|g_n(a)|, |g_n(b)|\} = \frac{g_n(a)+g_n(b)+|g_n(a)-g_n(b)|}{2}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $\mathbb{R}$ ou encore

la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge localement uniformément vers la fonction $f\ :\ x\mapsto 1$ sur $\mathbb{R}$.

3) Pour x réel et n entier naturel, on pose $f_n(x) = n(1-x)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Convergence simple. Soit x réel fixé. $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow x \in 2\mathbb{Z}$. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Si $x \notin 2\mathbb{Z}$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(n(1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow |1-x| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

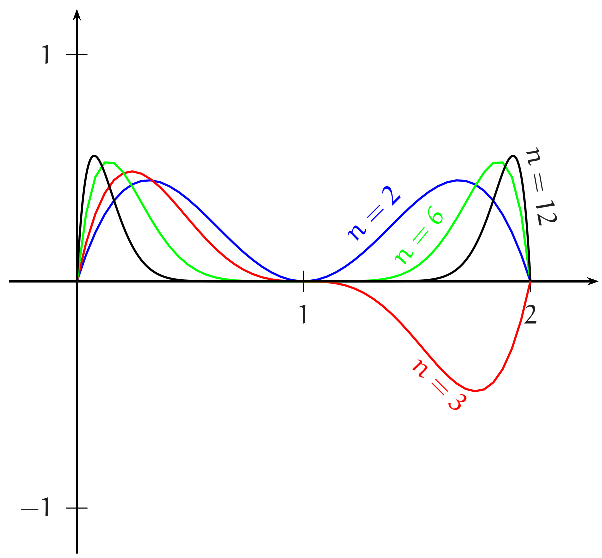
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,2]\cup 2\mathbb{Z}$.

Convergence uniforme sur $[0,2]$. Soit n un entier naturel non nul fixé.

$$\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - 0| \geqslant \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Cette dernière expression est équivalente à $\frac{\pi}{2e}$ en $+\infty$ et en particulier ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0,2]$.



Exercice n° 2

Convergence simple sur $\mathbb{R}^+$. Soit x un réel positif fixé. Pour $n > x$, $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ avec $1-\frac{x}{n} > 0$ et donc

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x+o(1)).$$

Donc, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto e^{-x}$.

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Pour x réel positif et n entier naturel non nul, posons

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x\in[0,n] \\ e^{-x} \text{ si } x > n \end{cases}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminons la borne supérieure de la fonction $|g_n|$ sur $[0,+\infty[$.

• La fonction g_n est positive sur $]n, +\infty[$. D'autre part, on sait que pour tout réel u, $e^u \geqslant 1 + u$ (inégalité de convexité) et donc pour tout réel x de $[0, n]$, $e^{-x/n} \geqslant 1 - \dfrac{x}{n} \geqslant 0$. Après élévation des deux membres de cette inégalité, par croissance de $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient $e^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ ou encore $g_n(x) \geqslant 0 = g_n(0)$.
Finalement, la fonction g_n est positive sur $[0, +\infty[$ et même, plus précisément, la fonction g_n admet un minimum en 0 égal à 0.

• La fonction g_n est définie et continue sur R^+. Pour $x \geqslant n$, $0 < g_n(x) \leqslant e^{-n} = g_n(n)$. D'autre part, la fonction g_n est continue sur le segment $[0, n]$ et admet donc sur $[0, n]$ un minimum et un maximum. De plus, pour $0 < x \leqslant n$, les inégalités précédentes sont strictes et la fonction $g_{n/[0,n]}$ admet son maximum dans $]0, n]$.

• Etudions la fonction g_n sur $[0, n]$. Pour $x \in [0, n]$, $g_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$ ($g_n'(n) = -e^{-n}$ est la dérivée à gauche de la fonction g_n en n). Puisque la dérivée à gauche de g_n en n est strictement négative et puisque la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0, n]$, sa dérivée g_n' est strictement négative sur un voisinage à gauche de n. La fonction g_n est alors strictement décroissante sur ce voisinage et la fonction g_n admet nécessairement son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en un certain point x_n de $]0, n[$. En un tel point, puisque l'intervalle $]0, n[$ est ouvert, on sait que la dérivée de la fonction g_n s'annule. L'égalité $g_n'(x_n) = 0$ fournit $\left(1 - \dfrac{x_n}{n}\right)^{n-1} = e^{-x_n}$ et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) e^{-x_n} = \frac{x_n e^{-x_n}}{n}.$$

En résumé, pour tout réel positif x, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \dfrac{x_n e^{-x_n}}{n}$ où x_n est un certain réel de $]0, n[$, avec égalité pour $x = x_n$, ce qui montre que $\|g_n\|_\infty = \dfrac{x_n e^{-x_n}}{n}$.

• Pour u réel positif, posons $h(u) = ue^{-u}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $u \geqslant 0$, $h'(u) = (1 - u)e^{-u}$. Par suite, la fonction h admet un maximum en 1 égal à $\dfrac{1}{e}$. On a montré que

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{ne}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\{|g_n(x)|,\ x \geqslant 0\} \leqslant \dfrac{1}{ne}$. Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\{|g_n(x)|,\ x \geqslant 0\} = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}^+ \text{ vers la fonction } x \mapsto e^{-x}.}$$

Exercice n° 3

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Si $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$,

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = (X + (1 - X))^n = 1.$$

• Si $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = x$,

$$\begin{aligned} B_n(f) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1 - X)^{n-k} = X \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1 - X)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= X \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k (1 - X)^{n-1-k} = X \text{ (d'après le cas précédent).} \end{aligned}$$

• Si $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = x(x - 1)$, alors $B_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1\right) X^k (1 - X)^{n-k}$ et donc $B_1(f) = 0$. Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n - 1]\!]$

$$\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n} - 1\right)\binom{n}{k} = -\frac{1}{n^2} k(n - k) \frac{n!}{k!(n - k)!} = -\frac{n - 1}{n} \frac{(n - 2)!}{(k - 1)!(n - k - 1)!} = -\frac{n - 1}{n} \binom{n - 2}{k - 1}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
B_n(f) &= -\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=1}^{n-1}X^{k-1}(1-X)^{(n-2)-(k-1)}\\
&= -\frac{n-1}{n}X(1-X)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}X^k(1-X)^{n-2-k} = -\frac{n-1}{n}X(1-X).
\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

b) D'après la question précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2X^k(1-X)^{n-k} - 2nX\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-n)X^k(1-X)^{n-k} - n(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kX^k(1-X)^{n-k}\\
&\quad + n^2X^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\\
&= n^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(\frac{k}{n}-1\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} - n^2(2X-1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k} + n^2X^2\\
&= -n(n-1)X(1-X) - n^2(2X-1)X + n^2X^2 = -nX^2 + nX = nX(1-X).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nX)^2X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X).}$$

2) Soit $\varepsilon > 0$. Soient n un entier naturel non nul et α un réel strictement positif donné. Soit x un réel de $[0, 1]$. Notons A (resp. B) l'ensemble des entiers $k \in [\![0, n]\!]$ tels que $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leqslant \alpha$ (resp. $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$). (Si A ou B sont vides, les sommes ci-dessous correspondantes sont nulles).

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f)(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|\\
&\leqslant \sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k}
\end{aligned}$$

f est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de Heine. Par suite, il existe $\alpha > 0$ tel que si x et y sont deux réels de $[0, 1]$ tels que $|x - y| \leqslant \alpha$ alors $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. α est ainsi dorénavant fixé. Pour ce choix de α,

$$\sum_{k\in A}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ensuite, la fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc est bornée sur ce segment. Soit M un majorant de la fonction $|f|$ sur $[0, 1]$.

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|x^k(1-x)^{n-k} \leqslant 2M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Mais si $k \in B$, l'inégalité $\left|x - \frac{k}{n}\right| > \alpha$ fournit $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha$ puis $1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}(k - nx)^2$ et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k\in B}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^2x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{1}{\alpha^2n^2}\times nx(1-x) = \frac{1}{\alpha^2n}\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{4\alpha^2n}.
\end{aligned}$$

En résumé, pour tout réel $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M \times \frac{1}{4\alpha^2 n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2\alpha^2 n}.$$

Maintenant, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M}{2\alpha^2 n} = 0$, il existe un entier naturel non nul N tel que pour $n \geqslant N$, $\frac{M}{2\alpha^2 n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geqslant N$, on a $|f(x) - B_n(f)(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^* /\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ (n \geqslant N \Rightarrow |f(x) - (B_n(f))(x)| \leqslant \varepsilon),$$

et donc que

$$\boxed{\text{la suite de polynômes } (B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } [0,1] \text{ vers } f.}$$

3) La question 2) montre le théorème de WEIERSTRASS dans le cas du segment $[0,1]$.
Soient $[a,b]$ un segment quelconque et f un application continue sur $[a,b]$.
Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = f(a + (b-a)x)$. La fonction g est continue sur $[0,1]$ et donc il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers g sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $Q_n = P_n\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \geqslant 1$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\forall y \in [0,1]$, $|g(y) - P_n(y)| \leqslant \varepsilon$.
Soient $x \in [a,b]$ et $n \geqslant N$. Le réel $y = \frac{x-a}{b-a}$ est dans $[0,1]$ et

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(a + (b-a)y) - Q_n(a + (b-a)y)| = |g(y) - P_n(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci démontre que la suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Exercice n° 4

Soir $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une certaine fonction que l'on note f.
(Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ et tout réel x, $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Pour $n \geqslant N$ et pour tout réel x,

$$|P_n(x) - P_N(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_N(x)| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Pour $n \geqslant N$, les polynômes $P_n - P_N$ sont bornés sur $\mathbb{R}$ et donc constants. Par suite, pour chaque $n \geqslant N$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n - P_N = a_n \quad (*)$. Puisque la suite (P_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$, La suite $(a_n) = (P_n(0) - P_N(0))$ converge vers un réel que l'on note a. On fait alors tendre n tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(*)$ et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = P_N(x) + a.$$

On a montré que f est un polynôme.

Exercice n° 5

1) Pour $x \in]-1,1[$ et n entier naturel non nul, posons $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$.

Soit $x \in]-1,1[$. Pour n entier naturel non nul, $|f_n(x)| \leqslant |x|^n$. Or, la série géométrique de terme général $|x|^n$, $n \geqslant 1$, est convergente et donc la série numérique de terme général $f_n(x)$ est absolument convergente et en particulier convergente. On en déduit que $f(x)$ existe.

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]-1,1[.}$$

Soit $a \in]0,1[$. Chaque f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[-a,a]$ et pour $x \in [-a,a]$,

$$f_n'(x) = x^{n-1}\sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour $x \in [-a,a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_n'(x)| \leqslant a^{n-1} + a^n \leqslant 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général $2a^{n-1}$, $n \geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f'_n, $n \geqslant 1$, est normalement et donc uniformément sur $[-a, a]$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers f sur $[-a, a]$,
- chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[-a, a]$,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[-a, a]$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ pour tout réel a de $]0, 1[$ et donc sur $]-1, 1[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,1[\text{ et } \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)).}$$

2) Ainsi, pour $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}e^{inx}\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n e^{inx}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}}{1 - xe^{ix}}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}}{1 - xe^{ix}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{ix}(1 - xe^{-ix})}{x^2 - 2x\cos x + 1}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{xe^{ix}(1 - xe^{-ix})}{x^2 - 2x\cos x + 1}\right) \\
&= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1}.
\end{aligned}$$

Mais, pour $x \in]-1, 1[$,

$$\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)' = \frac{(\sin x + x\cos x)(1 - x\cos x) - x\sin x(-\cos x + x\sin x)}{(1 - x\cos x)^2} = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1 - x\cos x)^2}.$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)\right)' &= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1 - x\cos x)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)^2} = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{(1 - x\cos x)^2 + x^2\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1} = f'(x).
\end{aligned}$$

Finalement, pour $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt = 0 + \mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right) - \mathrm{Arctan}(0) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right).$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\sin(nx)}{n} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right).}$$

Exercice n° 6

1) Pour n entier naturel non nul, on note f_n la fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Pour tout réel $x > 1$ et tout entier naturel $n \geqslant 1$, $nx > 1$ et donc $\ln(nx) > 0$ puis $f_n(x)$ existe.

Soit $x > 1$. La suite $\left(\dfrac{1}{\ln(nx)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc $f(x)$ existe.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est bien définie sur }]1, +\infty[.}$$

2) Limite de f en $+\infty$. Soit $x > 1$. Puisque la suite $\left(\dfrac{1}{\ln(nx)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, on sait alors que la valeur absolue de $f(x)$ est majorée par la valeur absolue du premier terme de la série. Ainsi

$$\forall x > 1,\ |f(x)| \leqslant \left|\frac{(-1)^0}{\ln(x)}\right| = \frac{1}{\ln x},$$

et en particulier

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On peut noter de plus que pour $x > 1$, $f(x)$ est du signe du premier terme de la série à savoir $\dfrac{1}{\ln(x)}$ et donc $\forall x \in]1,+\infty[$, $f(x) > 0$.

Convergence uniforme sur $]1,+\infty[$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour $x > 1$ et n naturel non nul,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\ln(kx)}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{\ln((n+1)x)}\right| = \frac{1}{\ln((n+1)x)} \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Donc, pour tout entier naturel non nul, $\displaystyle\sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| = 0$. La série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$.

Continuité sur $]1,+\infty[$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$ est continue sur $]1,+\infty[$ et donc f est donc continue sur $]1,+\infty[$ en tant que limite uniforme sur $]1,+\infty[$ d'une suite de fonctions continues sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]1,+\infty[.}$$

Limite en 1 à droite. Soit $n \geqslant 2$. Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f_n(x)$ tend vers $\ell_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 2$, converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la série numérique de terme général ℓ_n, $n \geqslant 2$ converge et que la fonction $x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{\ln(x)} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$ tend vers le réel $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures ou encore

$$\boxed{f(x) \underset{x\to1^+}{=} \frac{1}{\ln x} + O(1) \text{ et en particulier, } \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty.}$$

3) La série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers la fonction f sur $]1,+\infty[$. De plus chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$,

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.$$

Il reste à vérifier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n' sur $]1,+\infty[$.
Soit $x > 1$. La série de terme général $f_n'(x)$ est alternée car son terme général est alterné en signe et sa valeur absolue à savoir $\dfrac{1}{x\ln^2(nx)}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$ en décroissant. Donc, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x\ln^2(kx)}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^{n+1}}{x\ln^2((n+1)x)}\right| = \frac{1}{x\ln^2((n+1)x)} \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}.$$

Par suite, $\displaystyle\sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{\ln^2(n+1)}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in]1,+\infty[} |R_n(x)| = 0$. Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n', $n \geqslant 1$, converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers f sur $]1,+\infty[$,
- chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme.

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]1,+\infty[\text{ et } \forall x > 1,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.}$$

Pour $x > 1$, puisque la série de somme $f'(x)$ est alternée, $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme à savoir $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. Par suite, $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) \leqslant 0$ et f est donc strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est décroissante sur }]1,+\infty[.}$$

Exercice n° 7

1) Convergence simple. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ et la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement.
- Si $x = 0$, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = f_n(0) = 0$, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.
- Si $x > 0$, $n^2 f_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (d'après un théorème de croissances comparées) et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Dans ce cas aussi, la série de terme général $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Convergence normale. La fonction f_0 est la fonction nulle. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel positif x,

$$f_n'(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

La fonction f_n est positive sur $[0,+\infty[$, croissante sur $\left[0, \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{2}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$. On en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(t)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 4e^{-2}.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, diverge grossièrement et donc

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Soit $a > 0$. Pour $n \geqslant \dfrac{4}{a^2}$, on a $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leqslant a$ et donc la fonction f_n est décroissante sur $[a,+\infty[$. Soit donc n un entier supérieur ou égal à $\dfrac{4}{a^2}$. Pour tout réel t supérieur ou égal à a, on a $|f_n(t)| = f_n(t) \leqslant f_n(a)$ et donc $\sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |f_n(t)| = f_n(a)$.
Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0, \text{ la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge normalement et uniformément sur } [a,+\infty[.}$$

Convergence uniforme sur $[0,+\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|R_n(t)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t) \geqslant f_{n+1}(t),$$

et donc $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)| \geqslant \sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |f_{n+1}(t)| = 4e^{-2}$. Par suite, $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} |R_n(t)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}^+.}$$

2) Convergence simple. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est définie sur $]0,+\infty[$. Soit $x \in]0,+\infty[$. Puisque $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3x^2} > 0$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge. Donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

Convergence normale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est décroissante et positive sur $]0,+\infty[$. Donc $\sup_{x\in]0,+\infty[}|f_n(x)| = f_n(0) = \frac{1}{n}$.Puisque la série numérique de terme général $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}^+.}$$

Soit $a > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est décroissante et positive sur $]a,+\infty[$ et donc $\sup_{x\in[a,+\infty}|f_n(x)| = f_n(a)$.

Comme la série numérique de terme général $f_n(a)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge, la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur $[a,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } a > 0, \text{ la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ converge normalement et uniformément sur } [a,+\infty[.}$$

3) Convergence simple. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

• Si $x = 0$, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = f_n(0) = 0$. Dans ce cas, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.
• Si $x > 0$, la suite $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier $x > 0$ et de raison $\frac{1}{x^2+1} \in]0,1[$. On en déduit que la suite $\left(\frac{x}{(x^2+1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante de limite nulle. Par suite, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.
• Si $x < 0$, puisque pour tout entier naturel n, $f_n(x) = -f_n(-x)$, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.

Finalement

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

Convergence normale. La fonction f_0 n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ et donc la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}$, n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Analysons la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, sur $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $g_n = (-1)^n f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g_n'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} + x \times \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

La fonction g_n est positive sur $\mathbb{R}^+$, croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2n-1}}, +\infty\right[$. Puisque la fonction g_n est impaire, on en déduit que

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = g_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)}.$$

Mais $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} = \exp\left(-(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)$ et donc

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2}\times\sqrt{n}} > 0.$$

Par suite, la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}^*$, diverge et donc

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}^*, \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$$

Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, puisque la suite $\left(\dfrac{x}{(1+x^2)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante et de limite nulle, d'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée,

$$R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x}{(1+x^2)^k}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1}\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\right| = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} = g_{n+1}(x) \leqslant g_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right),$$

cette inégalité restant valable pour $x < 0$ par parité. Donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)| \leqslant g_{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$. D'après ci-dessus, $g_{n+1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et il en est de même de $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|R_n(x)|$. On a montré que

$$\boxed{\text{la série de fonctions de terme général } f_n,\ n \in \mathbb{N}, \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}.}$$

Exercice n° 8

1) Convergence simple. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, $1 + \dfrac{t^2}{n(1+t^2)} \geqslant 1 > 0$ et donc $f_n(t)$ existe. Ensuite, $\ln\left(1+\dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\right) > 0$ et donc la suite numérique $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alternée en signe. De plus, $|f_n(t)| = \ln\left(1+\dfrac{t^2}{n(1+t^2)}\right)$ et la suite $(|f_n(t)|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 en décroissant.
On en déduit que la série de terme général $f_n(t)$, $n \geqslant 1$, converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \geqslant 1, \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}.}$$

On pose alors $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Convergence uniforme. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée, pour tout réel t on a

$$\begin{aligned}|R_n(t)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(t)\right| \leqslant |f_{n+1}(t)| = \ln\left(1+\frac{t^2}{(n+1)(1+t^2)}\right)\\ &\leqslant \ln\left(1+\frac{t^2+1}{(n+1)(1+t^2)}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right),\end{aligned}$$

et donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)| \leqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) = 0$, on a encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|R_n(t)| = 0$ et on a montré que

$$\boxed{\text{La série de fonctions de terme général } f_n,\ n \geqslant 1, \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

2) D'après le théorème d'interversion des limites, f a une limite réelle en $+\infty$ et

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Puisque la série de terme général $(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ converge, on peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{N}\left(-\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{N}\ln\left(\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{1\times 3\times\ldots\times(2N-1)\times 3\times\ldots\times(2N+1)}{(2\times 4\times\ldots\times(2N))^2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{(1\times 2\times 3\times\ldots\times(2N-1)\times(2N))^2\times(2N+1)}{(2\times 4\times\ldots\times(2N))^4}\right) = \ln\left(\frac{(2N)!^2\times(2N+1)}{2^{4N}N!^4}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{\left(\frac{2N}{e}\right)^{4N}(4\pi N)(2N)}{2^{4N}\left(\frac{N}{e}\right)^{4N}(2\pi N)^2}\right) \text{ (d'après la formule de Stirling)}\\
&= \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f_n(t) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right).}$$

Exercice n° 9

Domaine de définition. Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour chaque $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(t)$ existe et de plus $f_n(t) = \frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc la série numérique de terme général $f_n(t)$, $n\geqslant 1$, converge absolument et en particulier converge. On a montré que

$$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

Parité. Pour tout réel t,

$$f(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(-nt)}{n^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{n^2} = -f(t).$$

$$\boxed{f \text{ est impaire.}}$$

Convergence normale. Pour tout réel t et tout entier naturel non nul n, $|f_n(t)|\leqslant\frac{\pi}{2n^2}$ et donc pour tout entier naturel non nul n,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|f_n(t)|\leqslant\frac{\pi}{2n^2}.$$

Comme la série numérique de terme général $\frac{\pi}{2n^2}$, $n\geqslant 1$, converge, la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Limite de f en $+\infty$. Puisque la série de fonctions de terme général f_n, $n\geqslant 1$, converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et que chaque fonction f_n a une limite réelle quand t tend vers $+\infty$ à savoir $\ell_n = \frac{\pi}{2n^2}$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que f a une limite réelle en $+\infty$ et que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ell_n = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{12}.$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = \frac{\pi^3}{12} \text{ et } \lim_{t\to-\infty} f(t) = -\frac{\pi^3}{12}.}$$

Continuité. Puisque chaque fonction f_n, $n\in\mathbb{N}^*$, est continue sur $\mathbb{R}$ et que la série de fonctions de terme général f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Dérivation. Soit $a > 0$. Chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geqslant a$,

$$f'_n(t) = \frac{n}{n^2(1+n^2t^2)} = \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\sup\limits_{t\in[a,+\infty[} |f'_n(t)| = f'_n(a) = \dfrac{1}{n(1+n^2a^2)}$. Puisque $\dfrac{1}{n(1+n^2a^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{a^2n^3} > 0$, la série de terme général $\dfrac{1}{n(1+n^2a^2)}$ converge et par suite, la série de fonctions de terme général f'_n, $n \geqslant 1$, converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

En résumé,
- la série de fonctions de terme général f_n, $n \geqslant 1$, converge simplement vers f sur $[a, +\infty[$,
- chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$,
- la série de fonctions de terme général f'_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et puisque f est impaire

$$\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^* \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}^*,\ f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}.}$$

Dérivabilité en 0. La fonction f' est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc la fonction f' admet une limite en 0^+ élément de $]-\infty, +\infty]$. Pour $t > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a $f'(t) \geqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n^2t^2)}$ et quand t tend vers 0, on obtient

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

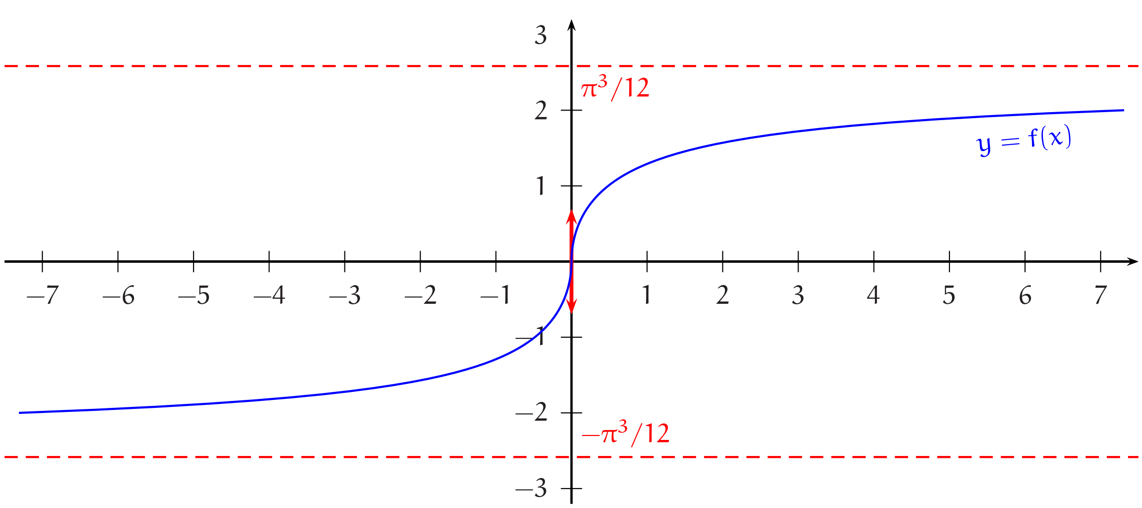
Cette inégalité étant vraie pour tout entier naturel non nul N, quand N tend vers $+\infty$ on obtient

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) \geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

On a montré que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f'(t) = +\infty$.

En résumé, f est de classe C^0 sur $[0, +\infty[$, de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $f'(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 par valeurs supérieures. D'après un corollaire du théorème des accroissements finis, on sait que f n'est pas dérivable en 0 à droite et que sa courbe représentative admet $[Oy)$ pour demi-tangente en $(0, 0)$. Puisque f est impaire, f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative admet (Oy) pour tangente en $(0, 0)$.

Allure du graphe.



Exercice n° 10

Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ d'après un théorème de croissances comparées. On en déduit que $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc que la série de terme général $e^{-x\sqrt{n}}$ converge. Ainsi, f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_k^{k+1} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant e^{-x\sqrt{k}}$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e^{-x\sqrt{k}} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} e^{-x\sqrt{t}}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leqslant f(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt \quad (*).$$

Soit $x \in]0,+\infty[$. En posant $u = x\sqrt{t}$ et donc $t = \dfrac{u^2}{x^2}$ puis $dt = \dfrac{2u}{x^2}\,du$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,du = \frac{2}{x^2} \times \Gamma(2) = \frac{2}{x^2}.$$

L'encadrement $(*)$ s'écrit alors

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \frac{2}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{2}{x^2}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x^2} = +\infty$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \underset{x\to 0,\ x>0}{\sim} \frac{2}{x^2}.}$$

Exercice n° 11

Soit $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|x^{n^2}\right| = |x|^{n^2} \leqslant |x|^n$. Puisque la série numérique de terme général $|x|^n$ converge, on en déduit que la série de terme général x^{n^2} est absolument convergente et en particulier convergente. Donc, f est bien définie sur $]-1,1[$.

Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2\ln x}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_k^{k+1} x^{t^2}\,dt \leqslant x^{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} x^{t^2}\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\forall x \in]0,1[,\ \int_1^{+\infty} x^{t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt \quad (*).$$

Soit $x \in]0,1[$. En posant $u = t\sqrt{-\ln x}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{t^2\ln x}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(t\sqrt{-\ln x})^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

L'encadrement $(*)$ s'écrit alors

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} - \int_0^1 x^{t^2}\,dt \leqslant f(x) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}} = +\infty$ et que $\forall x \in]0,1[$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{t^2}\,dt \leqslant 1$, on a montré que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \underset{x\to 1,\ x<1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}.}$$